

Zadanie 1. (0-1)



maj 2025 → MP

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2$ jest równa

A. 16

B. 18

C. 30

D. 34

I sposób

$$(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{16 \cdot 2} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{16} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

II sposób

$$(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{32})^2 - 2 \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 32 - 2 \cdot \sqrt{32 \cdot 2} + 2 = 34 - 2\sqrt{64} = 34 - 2 \cdot 8 = 34 - 16 = 18$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Zadanie 2. (0-1)



maj 2025 → MP

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{5^{12} + 5^{13} + 5^{14}}{5^{12}}$ jest równa

A. 30

B. 31C. 5^{12} D. 5^{27}

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^0 = 1$$

I sposób

$$\frac{5^{12} + 5^{13} + 5^{14}}{5^{12}} = \frac{5^{12}}{5^{12}} + \frac{5^{13}}{5^{12}} + \frac{5^{14}}{5^{12}} = 5^{12-12} + 5^{13-12} + 5^{14-12} = 5^0 + 5^1 + 5^2 = 1 + 5 + 25 = \underline{\underline{31}}$$

II sposób

$$\frac{5^{12} + 5^{13} + 5^{14}}{5^{12}} = \frac{5^{12}(5^0 + 5^1 + 5^2)}{5^{12}} = 5^0 + 5^1 + 5^2 = 1 + 5 + 25 = \underline{\underline{31}}$$

Zadanie 3. (0-1)

maj 2025 → MP

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Liczba $\log_3 108 - 2\log_3 2$ jest równa

- A.** 3 **B.** 9 **C.** $\log_3 104$ **D.** $2\log_3 54$

$$\log_3 27 = x$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

I sposób

$$\log_3 108 - 2\log_3 2 = \log_3 108 - \log_3 (2^2) = \log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 \left(\frac{108}{4} \right) = \log_3 27 = \underline{\underline{3}}$$

II sposób

$$\begin{aligned} \log_3 108 - 2\log_3 2 &= \log_3 (27 \cdot 4) - \log_3 (2^2) = \log_3 27 + \log_3 4 - \log_3 4 = \log_3 27 = \log_3 (3^3) = \\ &= 3 \cdot \log_3 3 = 3 \cdot \underline{1} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

Zadanie 4. (0–1)

maj 2025 → MP

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(3x + 2)^2 - (2x - 3)^2$ jest równa wartości wyrażenia

A. $5x^2 - 5$

B. $5x^2 + 13$

C. $5x^2 + 24x - 5$

D. $5x^2 + 24x - 13$

$$\begin{aligned} \underline{(3x+2)^2} - \underline{(2x-3)^2} &= \left[\underline{(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2} \right] - \left[\underline{(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2} \right] = \\ &= (9x^2 + 12x + 4) - (4x^2 - 12x + 9) = \underline{9x^2} + \underline{12x} + \underline{4} - \underline{4x^2} - \underline{12x} - \underline{9} = \underline{5x^2 + 24x - 5} \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

Zadanie 5. (0-2) maj 2025 → MP

Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4.

Niech n będzie nieparzystą liczbą naturalną, czyli $n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$.

Zatem $n = 2k + 1$ dla $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

$$\begin{aligned} 3n^2 + 2n + 7 &= 3 \cdot (2k+1)^2 + 2 \cdot (2k+1) + 7 = 3 \cdot [(2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2] + 4k + 2 + 7 = \\ &= 3 \cdot (4k^2 + 4k + 1) + 4k + 9 = 12k^2 + 12k + 3 + 4k + 9 = 12k^2 + 16k + 12 = 4(3k^2 + 4k + 3) = 4p \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \quad \mathbb{Z} - \text{zbiór liczb całkowitych} \quad \begin{aligned} p &= 3k^2 + 4k + 3 \\ p &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4, co należało wykazać.

Zadanie 6. (0-1)

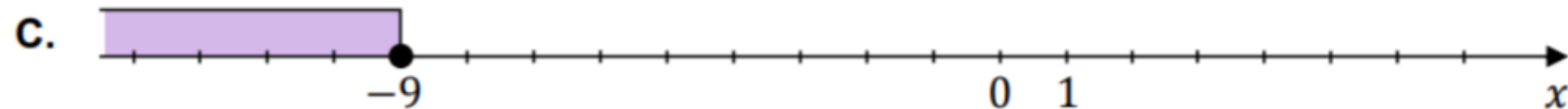
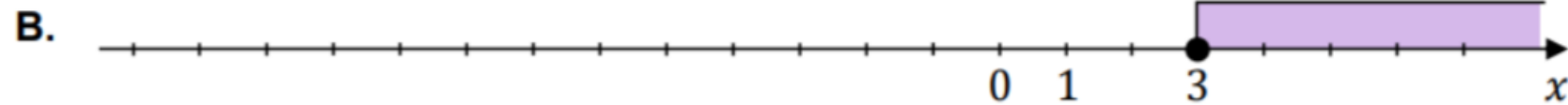
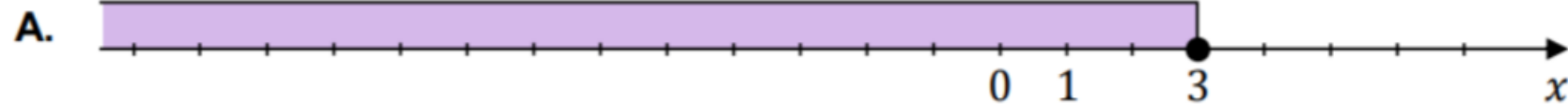


maj 2025 → MP

Dana jest nierówność

$$3 - 2(1 - 2x) \geq 2x - 17$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



$$3 - 2(1 - 2x) \geq 2x - 17$$

$$3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2x) \geq 2x - 17$$

$$3 - 2 + 4x \geq 2x - 17$$

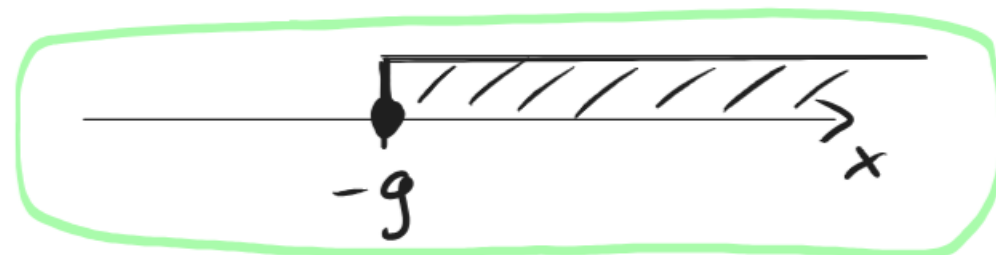
$$1 + 4x \geq 2x - 17 \quad | -2x$$

$$1 + 2x \geq -17 \quad | -1$$

$$2x \geq -18 \quad | :2$$

$$x \geq -9$$

$$x \in [-9, +\infty)$$



Zadanie 7. (0-1)



maj 2025 → MP

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $2x(x+3)(x^2+25)=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie**A.** dwa rozwiązania: (-3) oraz 0 .B. dwa rozwiązania: (-3) oraz 2 .C. trzy rozwiązania: (-5) , (-3) oraz 0 .D. cztery rozwiązania: (-5) , (-3) , 0 oraz 5 .

$$2x(x+3)(x^2+25)=0 \quad |:2$$

$$x(x+3)(x^2+25)=0$$

$$x=0 \quad \text{lub} \quad x+3=0 \quad \text{lub} \quad x^2+25=0$$

$$\underline{x=0} \quad \text{lub} \quad \underline{x=-3}$$

$$x \in \{-3, 0\}$$

$$a=1 \quad b=0 \quad c=25$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25$$

$$\Delta = 0 - 100 = -100 < 0$$

↓ sprzeczność
brak rozwiązań

II sposób

$$\rightarrow x^2 = -25$$

$\underbrace{\quad}_{\geq 0} \quad \underbrace{\quad}_{< 0}$

↓ sprzeczność
brak rozwiązań

Zadanie 8. (0-1)



maj 2025 → MP

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od (-2) oraz różnej od 0 wartość wyrażenia

$$\frac{x^2 + x}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{x + 2}{x}$$
 jest równa wartości wyrażenia

A. $\frac{x + 2}{4x + 4}$

B. $\frac{x + 1}{4x + 5}$

C. $\frac{x + 1}{x + 2}$

D. $\frac{2x}{x + 2}$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{x + 2}{x} &= \frac{x(x + 1)}{x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2} \cdot \frac{x + 2}{x} = \frac{x(x + 1)}{(x + 2)^2} \cdot \frac{x + 2}{x} = \frac{x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)}{(x + 2)^2 \cdot x} = \\ &= \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 2)} = \frac{x + 1}{x + 2} \end{aligned}$$

Zadanie 9. (0-2) maj 2025 → MP

Zarząd firmy wydzielił z budżetu kwotę 1 200 000 złotych łącznie na projekty badawcze dla dwóch zespołów: A i B. W pierwszym półroczu realizacji tych projektów oba zespoły wykorzystały łącznie 146 700 złotych – zespół A wykorzystał 13% przyznanych mu środków, a zespół B wykorzystał 11% przyznanych mu środków.

Oblicz kwotę przyznaną zespołowi A na realizację projektu badawczego.

Zapisz obliczenia.

Niech

x – kwota przyznana zespołowi A na realizację projektu badawczego,

y – kwota przyznana zespołowi B na realizację projektu badawczego.

$$13\% = \frac{13}{100} = 0,13$$

$$11\% = \frac{11}{100} = 0,11$$

$$\begin{cases} x = 735000 \\ y = 1200000 - 735000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 735000 \\ y = 465000 \end{cases}$$

Odp. Zespołowi A przyznano 735 000 złotych na realizację projektu badawczego.

$$\begin{cases} x + y = 1\,200\,000 \\ 0,13x + 0,11y = 146\,700 \end{cases}$$

metoda podstawiania

$$\begin{cases} y = 1\,200\,000 - x \\ 0,13x + 0,11 \cdot (1\,200\,000 - x) = 146\,700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1\,200\,000 - x \\ 0,13x + 132\,000 - 0,11x = 146\,700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1\,200\,000 - x \\ 0,02x + 132\,000 = 146\,700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1\,200\,000 - x \\ 0,02x = 146\,700 - 132\,000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1\,200\,000 - x \\ 0,02x = 14\,700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1\,200\,000 - x \\ x = 735\,000 \end{cases}$$

Rozwiąż nierówność

Zapisz obliczenia.

$$3(2x^2 + 1) < 11x$$

$$3(2x^2 + 1) < 11x$$

$$3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1 < 11x$$

$$6x^2 + 3 < 11x \quad | -11x$$

$$6x^2 - 11x + 3 < 0$$

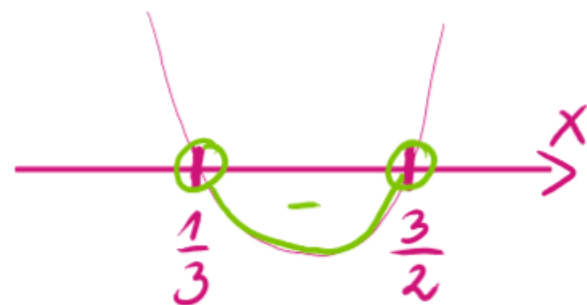
$$a=6 \quad b=-11 \quad c=3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 121 - 72 = 49$$

$$\Delta > 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) - 7}{2 \cdot 6} = \frac{11 - 7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) + 7}{2 \cdot 6} = \frac{11 + 7}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Odp. $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{2}$$

$$a > 0 \quad \cup$$

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$$

Zadanie 11. (0-4) maj 2025 → MP

Funkcja f jest określona następująco:

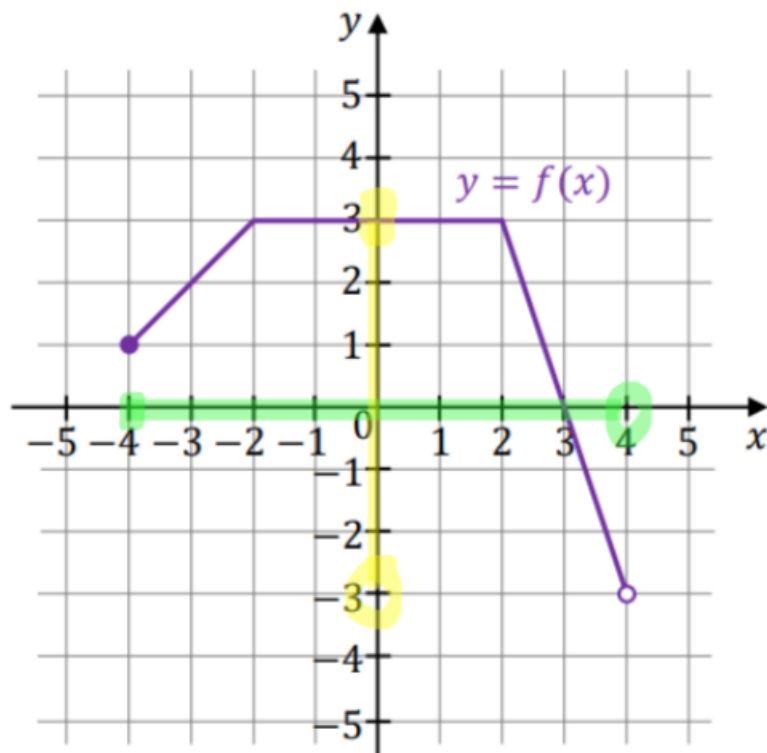
$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{dla } x \in [-4, -2] \\ 3 & \text{dla } x \in (-2, 2] \\ -3x + 9 & \text{dla } x \in (2, 4) \end{cases}$$

$$x \in [-4, 4)$$

x

y

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.

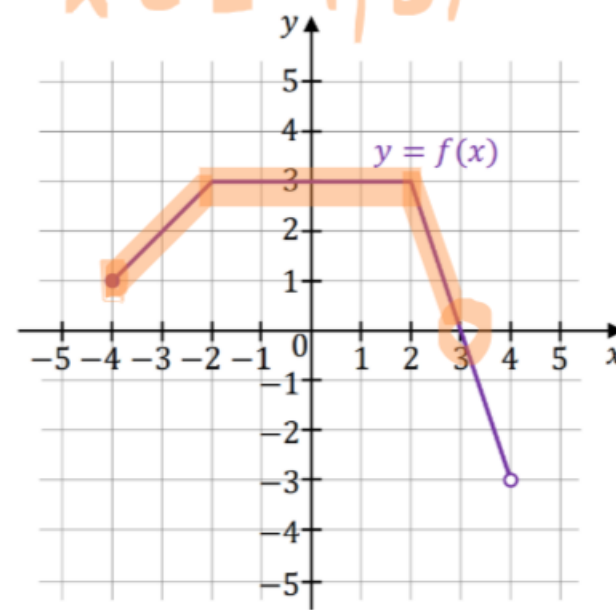


Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wy kropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

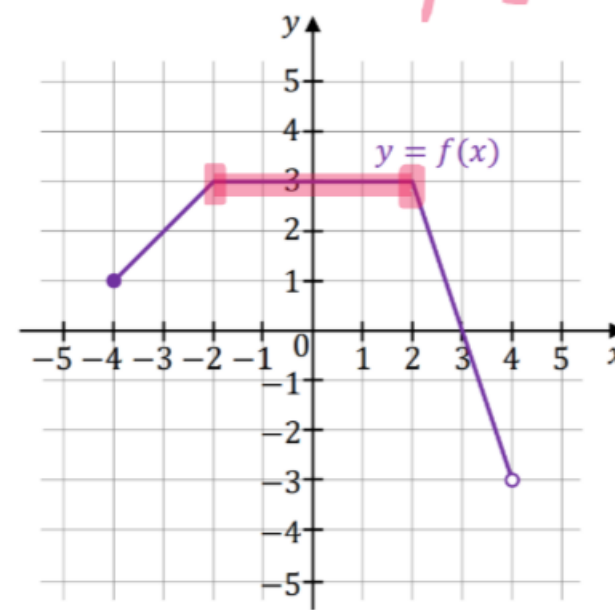
argument x
wartości y

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $[-4, 4)$.
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-3, 3]$.
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, jest przedział $[-4, 3)$.
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 3$ jest przedział $[-2, 2]$.

$$x \in [-4, 3)$$

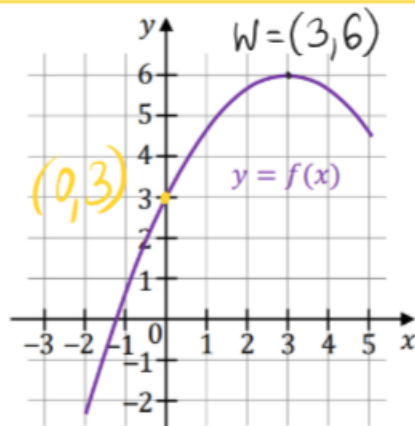


$$x \in [-2, 2]$$



Zadanie 12. maj 2025 → MP

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f (zobacz rysunek). Wierzchołek tej paraboli ma współrzędne $(3, 6)$. Ta parabola przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, 3)$.

**Zadanie 12.1. (0-2)**

Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.2. (0-1) 0000

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Oś symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu

A. $x = 3$ B. $x = -3$ C. $y = 6$ D. $y = -6$

12.2. $W = (3, 6)$ $p = 3$ $x = p$
 $x = 3$

Zadanie 12.3. (0-1)

Funkcja g jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $g(x) = f(x) - 3$. Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji g .

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wy kropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Suma $x_1 + x_2$ jest równa 6.

12.1. $W = (3, 6)$ $p = 3$ $q = 6$ $f(0) = 3$

12.3. $g(x) = 0$
 $f(x) - 3 = 0$
 $-\frac{1}{3}(x-3)^2 + 6 - 3 = 0$

$$-\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3 = 0$$

$$-\frac{1}{3}(x-3)^2 = -3$$

$$(x-3)^2 = 9$$

$$x-3 = -3 \text{ lub } x-3 = 3$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 6$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$

$$x_1 + x_2 = 0 + 6$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

$$f(x) = a(x-3)^2 + 6$$

$$f(0) = a(0-3)^2 + 6$$

$$3 = a \cdot (-3)^2 + 6$$

$$3 = 9a + 6 \quad / -6$$

$$-3 = 9a$$

$$9a = -3 \quad / :9$$

$$a = -\frac{3}{9}$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Odp. $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 6$

Zadanie 13. (0-1)

maj 2025 → MP

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = (3 - m)x - 4$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f nie ma miejsca zerowego dla m równego

A. (-3) **B.** 0 **(C.)** 3 **D.** 4

$$f(x) = (3 - m)x - 4$$

$$y = (3 - m)x - 4$$

$$y = ax + b$$

$$a = 3 - m \quad b = -4$$

Funkcja liniowa f , określona wzorem $f(x) = ax + b$,
nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.

$$a = 0$$

$$b \neq 0$$

$$3 - m = 0$$

$$-4 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$3 = m$$

$$\underline{m = 3}$$

wyraz wolny

współczynnik
kierunkowy

Zadanie 14. maj 2025 → MP

Ciąg (a_n) jest określony następująco:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \text{ dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

Zadanie 14.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trzeci wyraz ciągu (a_n) jest równy

- A. 4 B. 5 C. 7 **D. 11**

Zadanie 14.2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

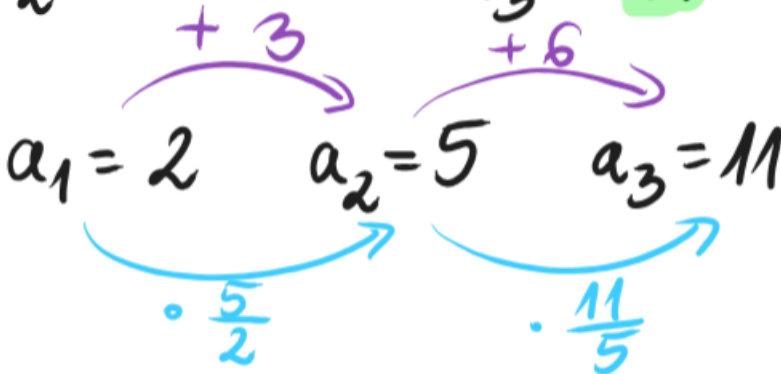
Ciąg (a_n) jest arytmetyczny.	P	F
Ciąg (a_n) jest geometryczny.	P	F

$$a_{1+1} = 2a_1 + 1 \quad a_{2+1} = 2a_2 + 1$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 \quad a_3 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$a_2 = 4 + 1 \quad a_3 = 10 + 1$$

$$a_2 = 5 \quad a_3 = \mathbf{11}$$



$$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3 \quad a_3 - a_2 = 11 - 5 = 6$$

$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \rightarrow$ ciąg (a_n) nie jest arytmetyczny

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{11}{5}$$

$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2} \rightarrow$ ciąg (a_n) nie jest geometryczny

Wyznacz wartość m , dla której trzywyrazowy ciąg

$$(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$$

jest arytmetyczny i malejący. Zapisz obliczenia.

$$a_1 = 2m + 11$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

oraz

$$\overbrace{a_2 - a_1}^r < 0$$

$$a_2 = m^2 + 3$$

$$(m^2 + 3) - (2m + 11) = (5 - m) - (m^2 + 3)$$

$$a_3 = 5 - m$$

$$m^2 + 3 - 2m - 11 = 5 - m - m^2 - 3$$

$$\underline{m^2 + 3 - 2m - 11} - \underline{5 + m + m^2 + 3} = 0$$

$$\underline{2m^2} - \underline{m} - 10 = 0$$

$$a=2 \quad b=-1 \quad c=-10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)$$

$$\Delta = 1 + 80 = 81 \quad \Delta > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$$

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - 9}{2 \cdot 2} = \frac{1 - 9}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + 9}{2 \cdot 2} = \frac{1 + 9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$m \in \left\{ -2, \frac{5}{2} \right\}$$

$$m = \frac{5}{2}$$

$$m = 2\frac{1}{2}$$

$$m = 2,5$$

$$(m^2 + 3) - (2m + 11) < 0$$

$$m^2 + 3 - 2m - 11 < 0$$

$$m^2 - 2m - 8 < 0$$

$$\text{dla } m = -2$$

$$(-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8 < 0$$

$$4 + 4 - 8 < 0$$

$$0 < 0$$

sprzeczności

$$\text{dla } m = \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} - 8 < 0$$

$$\frac{25}{4} - 5 - 8 < 0$$

$$\frac{25}{4} - \frac{20}{4} - \frac{32}{4} < 0$$

$$-\frac{27}{4} < 0 \quad \checkmark$$

Odp. Dla $m = 2,5$ podany ciąg jest arytmetyczny i malejący.

Zadanie 16. (0-1)

maj 2025 → MP

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 = 27$ oraz $a_2 = 9$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy

A. $\frac{1}{3}$

B. 1

C. 3

D. 729

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_2 = a_1 q^{2-1}$$

$$a_4 = a_1 q^{4-1}$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$a_1 = 27$$

$$9 = 27q$$

$$a_4 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$a_2 = 9$$

$$q = \frac{9}{27}$$

$$a_4 = 27 \cdot \frac{1}{27}$$

$$a_4 = ?$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = 1$$

Zadanie 17. (0-1)  maj 2025 → MP

Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta α jest równy

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$

$\sin \alpha > 0$

$\cos \alpha > 0$

$\operatorname{tg} \alpha > 0$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$

$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \sin \alpha \quad / \cdot \overbrace{\cos \alpha}^{>0}$

$\sqrt{3} \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad / : \underbrace{\sin \alpha}_{>0}$

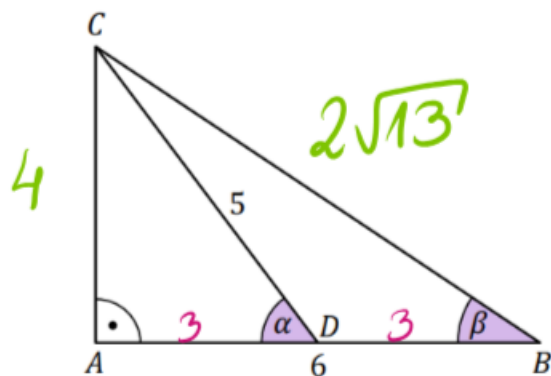
$\sqrt{3} = 2 \cos \alpha$

$2 \cos \alpha = \sqrt{3} \quad / : 2$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 18. maj 2025 → MP

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym bok BC jest przeciwprostokątną, przyprostokątna AB ma długość 6, a środkowa CD ma długość 5. Oznaczmy kąt ADC przez α , natomiast kąt ABC – przez β (zobacz rysunek).

**Zadanie 18.1. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ **D. $\frac{4}{3}$**

Zadanie 18.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta β jest równy

- A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$** B. $\frac{3}{\sqrt{13}}$ C. $\frac{5}{2\sqrt{13}}$ D. $\frac{4}{5}$

$$\sin \beta = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

$$|AD| = |BD| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Twierdzenie Pitagorasa

$$\triangle ADC \quad |AC|^2 + |AD|^2 = |CD|^2$$

$$|AC|^2 + 3^2 = 5^2$$

$$|AC|^2 + 9 = 25 \quad / -9$$

$$|AC|^2 = 16 \quad / \sqrt{}$$

$$|AC| = 4 \quad |AC| > 0$$

$$\triangle ABC \quad |AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

$$16 + 6^2 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 16 + 36$$

$$|BC|^2 = 52 \quad / \sqrt{}$$

$$|BC| = 2\sqrt{13} \quad |BC| > 0$$

$$\tan \alpha = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{4}{3}$$

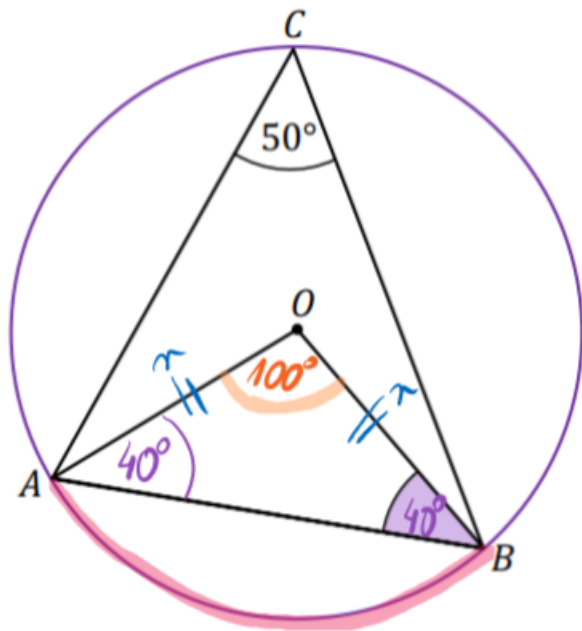
$$\begin{array}{r} 52 : 2 = 26 \\ 26 : 2 = 13 \\ 13 : 1 = 13 \end{array} \Rightarrow 2$$

Zadanie 19. (0-1)

maj 2025 → MP

Punkty A , B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O .

Miara kąta BCA jest równa 50° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

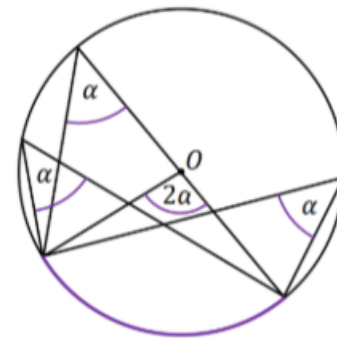
Miara kąta ostrego ABO jest równa

A. 20° B. 35° C. 40° D. 50° **Katy w okręgu**

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O , opartych na tym samym łuku, są równe.



$$|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB|$$

$$|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot 50^\circ$$

$$|\sphericalangle AOB| = 100^\circ$$

$|AO| = |BO| = r$, r - długość promienia okręgu o środku w punkcie O .

Trójkąt AOB jest równoramienny.

$$|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle ABO|$$

$$|\sphericalangle OAB| + |\sphericalangle ABO| + |\sphericalangle AOB| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle ABO| + |\sphericalangle ABO| + 100^\circ = 180^\circ \quad / -100^\circ$$

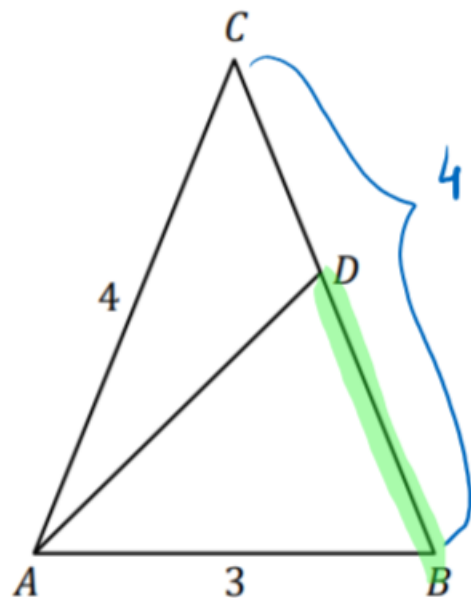
$$2 \cdot |\sphericalangle ABO| = 80^\circ \quad / :2$$

$$|\sphericalangle ABO| = 40^\circ$$

Zadanie 20. (0-1) maj 2025 → MP

W trójkącie równoramiennym ABC dane są: $|AC| = |BC| = 4$ i $|AB| = 3$.

Na boku BC , między punktami B i C , wybrano taki punkt D , że trójkąty ABC i BDA są podobne (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odcinek BD ma długość

A. 2

B. 2,25

C. 2,5

D. 3

Trójkąt BDA jest równoramienny.

Niech $|\angle ABC| = \alpha$ oraz $|BD| = x$.

$$\triangle ABC \sim \triangle BDA$$



$$\frac{x}{3} = \frac{3}{4}$$

$$x \cdot 4 = 3 \cdot 3$$

$$4x = 9 \quad |:4$$

$$x = \frac{9}{4}$$

$$x = 2,25$$

$$|\angle BAC| = \alpha$$

$$|\angle ACB| = 180^\circ - 2\alpha$$

$$|\angle ABD| = \alpha$$

Trójkąt ABC nie jest równoboczny.

$$|\angle ACB| \neq |\angle ABC|$$

$$180^\circ - 2\alpha \neq \alpha$$

$$|\angle BAD| \neq |\angle BAC|$$

$$|\angle BAD| \neq \alpha$$

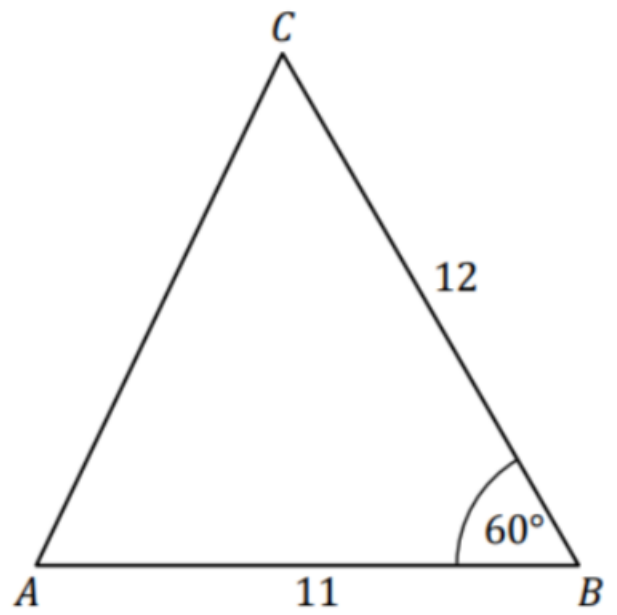
$$|\angle BAD| = 180^\circ - 2\alpha$$

$$|\angle ADB| = \alpha$$

Jeżeli dwa trójkąty są podobne, to kąty odpowiadające sobie w tych trójkątach są równej miary.

Zadanie 21. (0-1) ■ ■ ■ ■ ✍ maj 2025 → MP

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 11$, $|BC| = 12$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ABC jest równoramienny.	P	☒ F
Pole trójkąta ABC jest równe <u>$33\sqrt{3}$</u> .	☒ P	F

TWIERDZENIE COSINUSÓW

$$|AC|^2 = 11^2 + 12^2 - 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \cos 60^\circ$$

$$|AC|^2 = 121 + 144 - 264 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|AC|^2 = 265 - 132$$

$$|AC|^2 = 133 \quad \sqrt{\quad}, \quad |AC| > 0$$

$$|AC| = \sqrt{133}$$

$$|AC| \neq |AB|, |AC| \neq |BC|, |AB| \neq |BC|.$$

Trójkąt ABC nie jest równoramienny.

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \overbrace{12}^{|BC|} \cdot \overbrace{11}^{|AB|} \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot 11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= 3 \cdot 11 \cdot \sqrt{3} = 33\sqrt{3} \end{aligned}$$

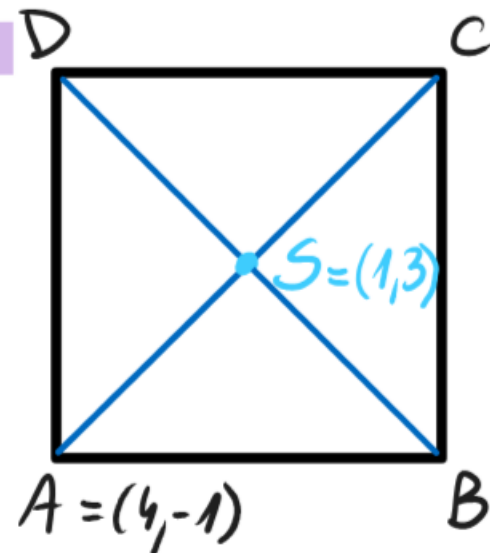
Zadanie 22. (0-1) maj 2025 → MP

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A = (4, -1)$. Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie $S = (1, 3)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przekątna kwadratu $ABCD$ ma długość

- A. 5 B. 7 **C. 10** D. 14



$|AC| = |BD| = d$, d - długość przekątnej kwadratu $ABCD$.

$|AS| = |BS| = |CS| = |DS| = \frac{1}{2}d \rightarrow$ połowa długości przekątnej kwadratu $ABCD$

$$|AS| = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + [3 - (-1)]^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{9 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|AS| = \frac{1}{2}d$$

$$5 = \frac{1}{2}d \quad | \cdot 2$$

$$10 = d$$

$$d = 10$$

Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

Zadanie 23. (0-1)

maj 2025 → MP

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) proste k oraz l są określone równaniami

$$k: y = (m - 2)x + 5$$

$$l: y = -4x + (m + 3)$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste k oraz l są równoległe, gdy liczba m jest równa

A. (-4) **B.** (-2) **C.** 2 **D.** 5

Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

$$y = ax + b$$

$$a_k = m - 2$$

$$b_k = 5$$

$$a_l = -4$$

$$b_l = m + 3$$

$$a_k = a_l$$

$$m - 2 = -4 \quad | +2$$

$$m = -2$$

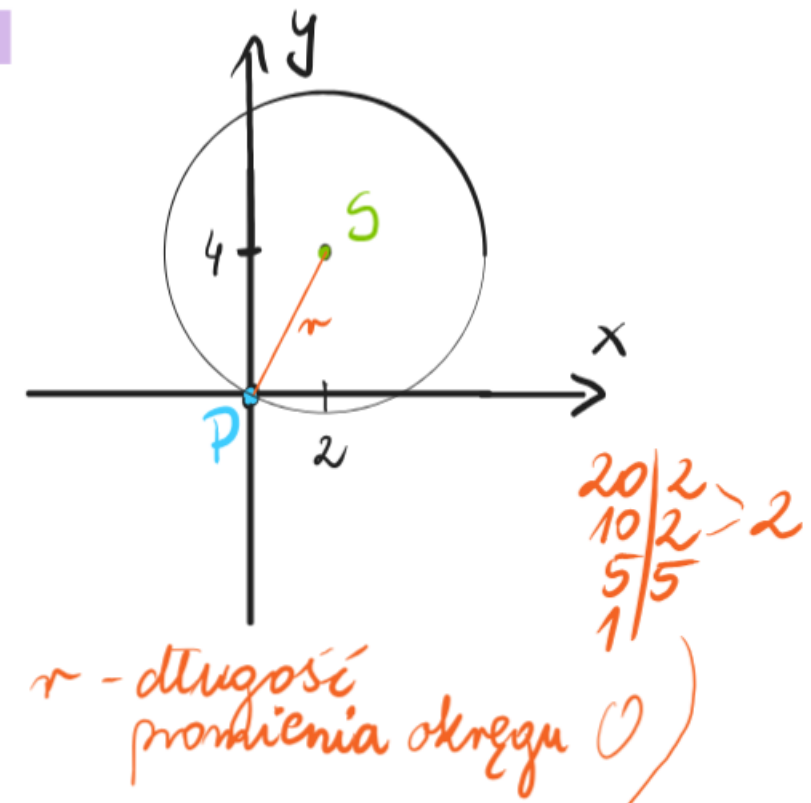
Zadanie 24. (0-1) ■ ■ ■ ■ ✍ maj 2025 → MP

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = (0, 0)$ leży na okręgu $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S = (2, 4)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest określony równaniem

- A. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2\sqrt{5}$
- B. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$**
- C. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 2\sqrt{5}$
- D. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$



$|PS| = \sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Długość promienia okręgu $\mathcal{O}$ jest równa długości odcinka PS .

$r = |PS|$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$S = (a, b)$ $a = 2$
 $b = 4$

$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$

$r^2 = |PS|^2 = (\sqrt{20})^2 = 20$

$\frac{20}{2} = 10$
 $\frac{10}{2} = 5$
 $\frac{5}{5} = 1$
 > 2

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$

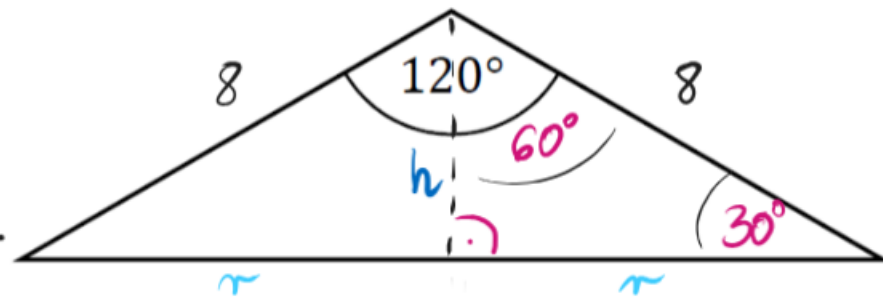
Zadanie 25. (0-3) maj 2025 → MP

Tworząca stożka ma długość 8. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę 120° .

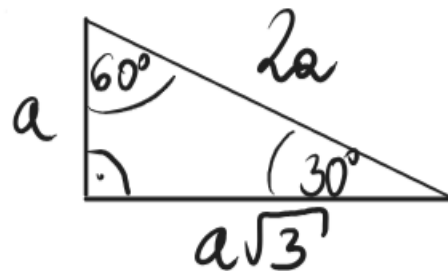
Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

Niech

l - tworząca stożka,
 h - wysokość stożka,
 r - promień podstawy stożka.



$$l = 8$$

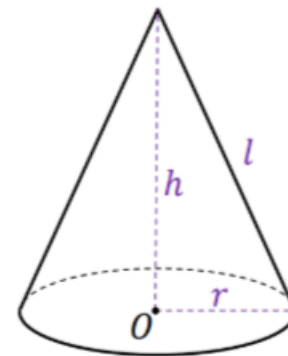


Stożek

$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r (r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, natomiast l – tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.

$$\begin{aligned} 2a &= 8 \quad / :2 \\ a &= 4 \quad / \cdot \sqrt{3} \\ a\sqrt{3} &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= 4 \\ r &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 4 = \frac{\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 4 = \left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 16 \cdot 3 \cdot 4 = \pi \cdot 16 \cdot 4 = \pi \cdot 64 = \underline{\underline{64\pi}}$$

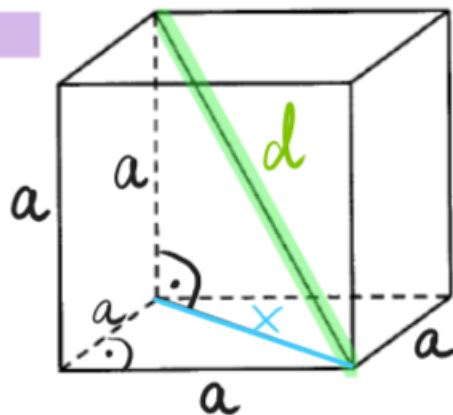
Odp. Objętość tego stożka wynosi 64π .

Zadanie 26. (0-1)  maj 2025 → MP

Objętość sześcianu jest równa 729.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość przekątnej tego sześcianu jest równa



A. $9\sqrt{3}$

B. $9\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{2}$

Niech a oznacza długość krawędzi sześcianu.

$V = 729$ $V = a^3$, $a > 0$. I sposób (zastosowanie wzoru na długość przekątnej sześcianu)

$$729 = a^3$$

$$a^3 = 729 \quad / \sqrt[3]{}$$

$$a = 9$$

$$d = a\sqrt{3}$$

$$\boxed{d = 9\sqrt{3}}$$

II sposób (dwukrotne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa)

$$a^2 + a^2 = x^2, \quad x > 0.$$

$$9^2 + 9^2 = x^2$$

$$x^2 = 2 \cdot 9^2 \quad / \sqrt{}$$

$$x = 9\sqrt{2}$$

$$x^2 + a^2 = d^2, \quad d > 0.$$

$$2 \cdot 9^2 + 9^2 = d^2$$

$$d^2 = 3 \cdot 9^2 \quad / \sqrt{}$$

$$\boxed{d = 9\sqrt{3}}$$

Zadanie 27. (0–1)

maj 2025 → MP

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych nieparzystych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jeden raz cyfra 0, jest

- A.** 45 **B.** 50 **C.** 54 **D.** 81

cyfra setek	cyfra dziesiątek	cyfra jednostki
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0	1, 3, 5, 7, 9
<u>9</u>	<u>1</u>	<u>5</u>
$\cdot \quad \cdot \quad =$		
<u><u>45</u></u>		

Cyfra 0 nie może być cyfrą setek, ponieważ wówczas liczba nie byłaby trzycyfrową liczbą naturalną.

Cyfra 0 nie może być cyfrą jednostki, ponieważ wówczas trzycyfrowa liczba naturalna byłaby liczbą parzystą.

Stąd cyfra 0 musi być cyfrą dziesiątek.

Cyfra setek musi być cyfrą różną od 0, aby liczba była trzycyfrową liczbą naturalną.

Cyfrą jednostki musi być jedna z cyfr: 1, 3, 5, 7 lub 9, aby trzycyfrowa liczba naturalna była nieparzysta.

Zadanie 28. (0-1) *maj 2025 → MP*

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

Zdarzenie A polega na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek będzie równa 11.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{6}{36}$

C. $\frac{11}{36}$

D. $\frac{2}{36}$

$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

→ liczba wszystkich zdarzeń elementarnych
→ reguła mnożenia

$6 + 5 = 5 + 6 = 11$

$A = \{(5, 6), (6, 5)\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}$

(klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

$|A| = 2$ → liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A

x - wynik pierwszego rzutu, y - wynik drugiego rzutu.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Zadanie 29. (0-1)   maj 2025 → MP

Średnia arytmetyczna siedmiu liczb: 1, 2, 3, 4, 5, x, y, jest równa 3.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma $x + y$ jest równa

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

$$\frac{1+2+3+4+5+x+y}{7} = 3$$

/. 7

$$1+2+3+4+5+x+y = 21$$

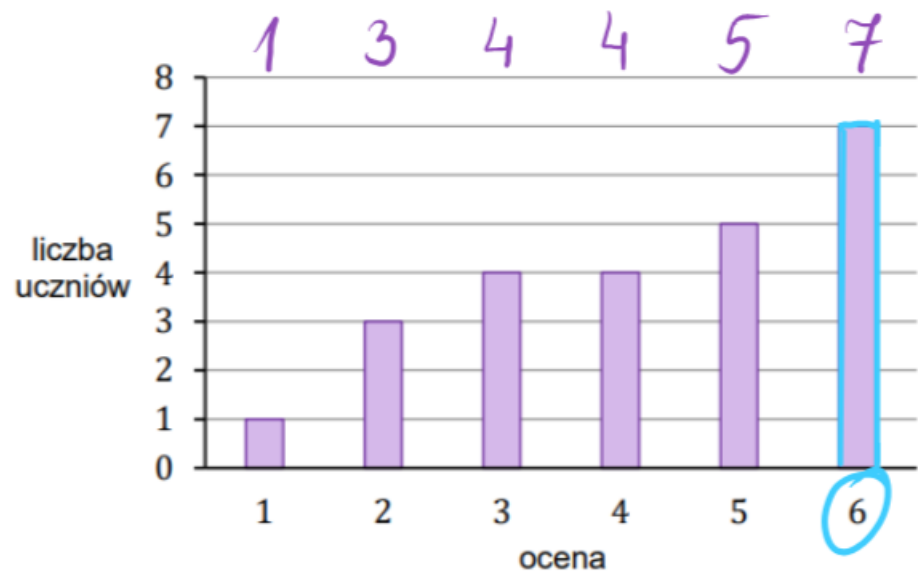
$$15+x+y = 21$$

/. 15

$$x+y = 6$$

Zadanie 30. (0-2) maj 2025 → MP

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej liczącej 24 uczniów. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wy kropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

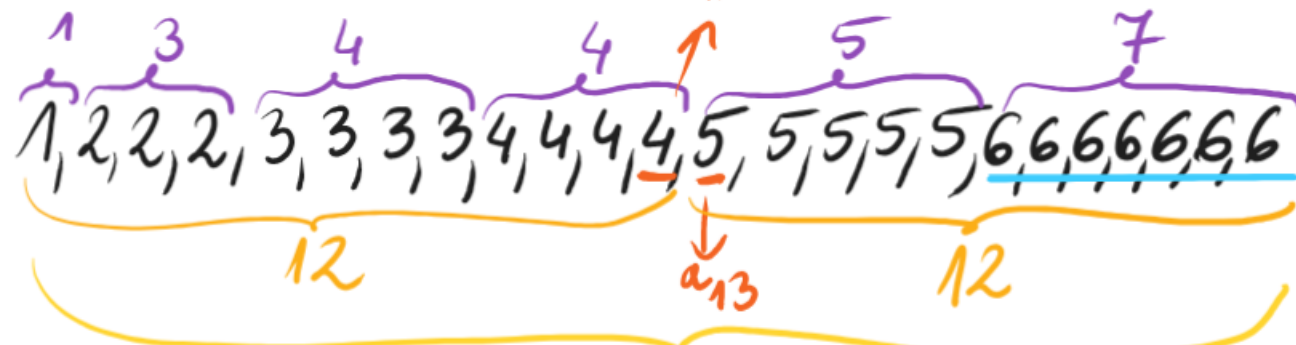
1. Mediana ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa

4,5

2. Dominanta ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa

6

$$1 + 3 + 4 + 4 + 5 + 7 = 24$$



$n = 24 \rightarrow$ parzysta liczba ocen

m - mediana ocen

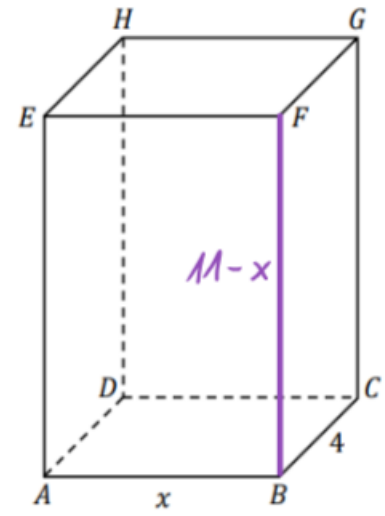
$$m = \frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}) = \frac{1}{2} \cdot (a_{12} + a_{13}) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 5) = \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2} = 4,5$$

Dominantą (modą) nazywamy tę wartość, która pojawia się w danym zbiorze wyników najczęściej. Najwięcej było szóstek.

Zadanie 31. (0-4) maj 2025 → MP

Rozważamy wszystkie prostopadłościany $ABCDEFGH$, w których krawędź BC ma długość 4 oraz suma długości wszystkich krawędzi wychodzących z wierzchołka B jest równa 15 (zobacz rysunek).

Niech $P(x)$ oznacza funkcję pola powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB .



$$|AB| = x$$

$$|BC| = 4$$

$$|AB| + |BC| + |BF| = 15$$

$$x + 4 + |BF| = 15 \quad | -4$$

$$x + |BF| = 11 \quad | -x$$

$$|BF| = 11 - x$$

P_c - pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$

$$P_c = 2 \cdot (|AB| \cdot |BC| + |AB| \cdot |BF| + |BC| \cdot |BF|)$$

$$P(x) = 2 \cdot [x \cdot 4 + x \cdot (11 - x) + 4 \cdot (11 - x)]$$

$$P(x) = 2 \cdot (4x + 11x - x^2 + 44 - 4x)$$

$$P(x) = 8x + 22x - 2x^2 + 88 - 8x$$

$$P(x) = -2x^2 + 22x + 88$$

D - dziedcina funkcji P

$$x \in (0, 11) \quad \text{Dziedzina: } x \in (0, 11)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli.
W - wierzchołek paraboli

$$a = -2 \quad b = 22 \quad c = 88 \quad W = (p, q)$$

$$a < 0 \quad \text{ramiona paraboli są skierowane w dół}$$

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{22}{2 \cdot (-2)} = \frac{-22}{-4} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} \in (0, 11)$$

Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu $11/2$.

Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P . Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe. Zapisz obliczenia.

$$|AB| > 0 \quad \begin{cases} x > 0 \\ 11 - x > 0 \\ 11 > x \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < 11 \end{cases} \quad x \in (0, 11)$$

Odp. Funkcja P jest określona wzorem $P(x) = -2x^2 + 22x + 88$. Dziedziną funkcji P jest przedział $(0, 11)$.

Spośród rozważanych prostopadłościanów największe pole powierzchni całkowitej ma ten, którego długość x krawędzi AB wynosi $\frac{11}{2}$.