

Zadanie 1. (0-2) maj 2025 → MR

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t \quad \text{dla } t \geq 0$$

gdzie:

N_0 – liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,

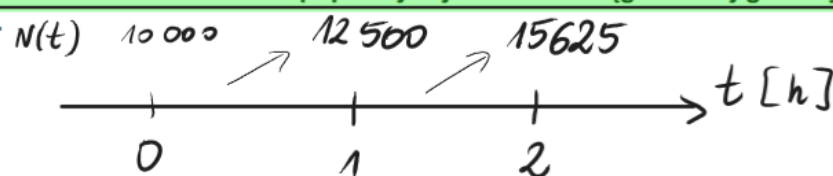
k – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,

t – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625.

Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny.

Zapisz obliczenia.



$$\frac{12500 - 10000}{10000} \cdot 100\% = \frac{2500}{10000} \cdot 100\% = \frac{25}{100} \cdot 100\% = 25\%$$

$$\frac{N(t+1) - N(t)}{N(t)} \cdot 100\% = \frac{10000 \cdot (1,25)^{t+1} - 10000 \cdot (1,25)^t}{10000 \cdot (1,25)^t} \cdot 100\% = (1,25 - 1) \cdot 100\% = 0,25 \cdot 100\% = 25\%$$

Odp. Liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny wzrastała o 25%.

$$N_0 = 10000$$

$$N(t) = N_0 \cdot k^t$$

$$k > 0 \\ t \geq 0$$

$$N(2) = 15625$$

$$N(2) = 10000 \cdot k^2$$

$$10000 \cdot k^2 = 15625 \quad |:10000$$

$$k^2 = 1,5625$$

$$k = 1,25$$

lub

$$k = -1,25$$

$$k > 0$$

skreślenie z założeniem, że k jest dodatnią stałą

$$N(t) = 10000 \cdot (1,25)^t$$

$$N(1) = 10000 \cdot 1,25$$

$$N(1) = 12500$$

$$\begin{matrix} 0,25\% \nearrow 1,25 \times \\ \times \nearrow 1,25 \end{matrix}$$

Zadanie 2. (0-3) maj 2025 → MR

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

Niech $\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Założenia: $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $b \neq \frac{1}{2}a$.

Tęza: $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$.

Dowód: $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$

$$(a + 2b)^2 \cdot (a + 2b) > 8ab(a + 2b)$$

$$\div: \overbrace{(a + 2b)}^{>0} \leftarrow$$

$$\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \quad \cdot \frac{1}{2} \\ \hline 2b > 0 \\ a + 2b > 0 \end{array}$$

$$(a + 2b)^2 > 8ab$$

$$a^2 + 4ab + 4b^2 > 8ab$$

$$\div - 8ab$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 > 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(a - 2b)^2}_{>0} > 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej różnej od zera jest liczbą dodatnią.

$$\begin{array}{l} (+)^2 = (+) \\ 0^2 = 0 \\ (-)^2 = (+) \end{array}$$

Zatem dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$, co należało wykazać.

Zadanie 3. (0-3) maj 2025 → MK

W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Oblicz miarę kąta DAC . Zapisz obliczenia.

Niech $|AB|=|BC|=|AC|=a$, $\angle DAC=\alpha$ oraz $|AD|=x$.

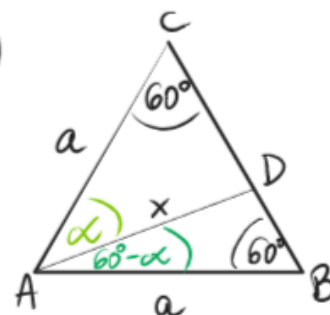
Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, zatem $\angle ABC=\angle ACB=\angle BAC=60^\circ$.

$$\angle DAC + \angle BAD = \angle BAC$$

$$\alpha + \angle BAD = 60^\circ$$

$$\angle BAD = 60^\circ - \alpha$$

$$\alpha \in (0^\circ, 60^\circ)$$



$$\frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$2 \sin 60^\circ \cos \alpha - 2 \cos 60^\circ \sin \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha - \sin \alpha$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha - \sin \alpha$$

$$\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha - \sin \alpha \quad | + \sin \alpha$$

$$\sqrt{3} \cos \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Zatem $\angle DAC = 45^\circ$.

Odp. Miara kąta DAC wynosi 45° .

$$| : \sqrt{3}$$

$$\alpha \in (0^\circ, 60^\circ)$$

Zadanie 4. (0-3) maj 2025 → MR

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$$

Niech

A - zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek w czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry,

B - zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek w czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} \cdot \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

$$|B| = \binom{4}{2} \cdot 5^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot 25 = \frac{2! \cdot 3!}{2! \cdot 2!} \cdot 25 = \frac{3!}{2} \cdot 25 = 6 \cdot 25 = 150$$

$\underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$ → wybór dwóch miejsc z czterech na piątki
→ wybór liczb na pozostałych miejscach z liczb: 1, 2, 3, 4, 6 ($|\{1, 2, 3, 4, 6\}| = 5$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$|A \cap B| = \binom{4}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 = 6 + 6 \cdot 2 \cdot 4 = 6 + 48 = 54$$

dokładnie dwie piątki i
dokładnie dwie szóstki

$\underline{6} \underline{5} \underline{5} \underline{6}$
wybór dwóch miejsc z czterech na piątki (pozostałe miejsca wypełnią szóstki)

dokładnie dwie piątki i
dokładnie jedna szóstka

$\underline{\quad} \underline{5} \underline{5} \underline{\quad}$
wybór miejsca na piątki,
wybór miejsca na szóstkę,
wybór liczby na miejscu, które zostało z liczb: 1, 2, 3, 4 ($|\{1, 2, 3, 4\}| = 4$)

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25} = 0,36$$

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek wynosi 0,36.

Zadanie 5. (0-4) maj 2025 → MR

Rozwiąż nierówność

$$|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$$

Zapisz obliczenia.

$$|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$$

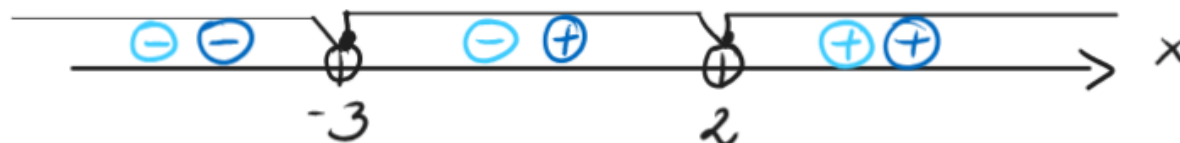
$$x - 2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -3$$

$$-3 < 2$$



$$\text{I } x \in (-\infty, -3)$$

$$-(x - 2) + 2(x + 3) < -2$$

$$-x + 2 + 2x + 6 < -2$$

$$x + 8 < -2$$

$$x < -10$$

$$x \in (-\infty, -10)$$

$$\underline{\underline{x \in (-\infty, -10)}}$$

$$\text{II } x \in [-3, 2)$$

$$-(x - 2) - 2(x + 3) < -2$$

$$-x + 2 - 2x - 6 < -2$$

$$-3x - 4 < -2$$

$$-3x < 2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

$$x \in (-\frac{2}{3}, +\infty)$$

$$\underline{\underline{x \in (-\frac{2}{3}, 2)}}$$

$$\text{III } x \in [2, +\infty)$$

$$(x - 2) - 2(x + 3) < -2$$

$$x - 2 - 2x - 6 < -2$$

$$-x - 8 < -2$$

$$-x < 6$$

$$x > -6$$

$$x \in (-6, +\infty)$$

$$\underline{\underline{x \in [2, +\infty)}}$$

$$\text{Odp. } x \in (-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty).$$

Zadanie 6. (0-4) maj 2025 → MR

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i zbieżny.

W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.

Zapisz obliczenia.

$$|q| < 1$$

$$q \in (-1, 1)$$

$$a_1 + a_3 = 20 \rightarrow a_3 = 20 - a_1$$

$$a_1^2 + a_3^2 = 328$$

$$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$$

$$a_1^2 + 400 - 40a_1 + a_1^2 = 328 \quad | -328$$

$$2a_1^2 - 40a_1 + 72 = 0 \quad | :2$$

$$a_1^2 - 20a_1 + 36 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 400 - 144 = 256$$

$$\Delta > 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{256} = 16$$

$$a_{11} = \frac{20 - 16}{2} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow$$

$$a_{12} = \frac{20 + 16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$a_1 q^2 = 20 - a_1$$

$$18q^2 = 20 - 18 \quad | :2$$

$$9q^2 = 1$$

$$q^2 = \frac{1}{9}$$

$$q = -\frac{1}{3} \text{ lub } q = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \in (-1, 1) \quad \frac{1}{3} \in (-1, 1)$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_1 q^2 = 20 - a_1$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$a_1 q^2 = 20 - a_1$$

$$2q^2 = 20 - 2 \quad | :2$$

$$q^2 = 9$$

$$q = -3 \text{ lub } q = 3$$

$$-3 \notin (-1, 1) \quad 3 \notin (-1, 1)$$

$$\text{I } a_1 = 18, q = -\frac{1}{3}$$

$$\text{II } a_1 = 18, q = \frac{1}{3}$$

$$S_1 = \frac{18}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{18}{1 + \frac{1}{3}} = 18 : \frac{4}{3} = 18 \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{2} = 13,5$$

$$S_2 = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 18 : \frac{2}{3} = 18 \cdot \frac{3}{2} = 27$$

Odp. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi 13,5 lub 27.

Zadanie 7. (0-4) maj 2025 → MR

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem ramienia AD , a punkt F jest środkiem ramienia BC trapezu. Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$.

Wykaż, że $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} |AB| &= x & |AE| &= |DE| & \frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} &= \frac{1}{2} & P_{ABFE} &= 2 \cdot P_{EFCD} \\ |CD| &= y & |BF| &= |CF| & \frac{1}{2} \cdot (x+z) \cdot h &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (y+z) \cdot h & / \cdot \frac{2}{h} \\ |EF| &= z \end{aligned}$$

Trójkąt GAE jest przystający do trójkąta HED na podstawie cechy przystawania "ką-bok-kąt".

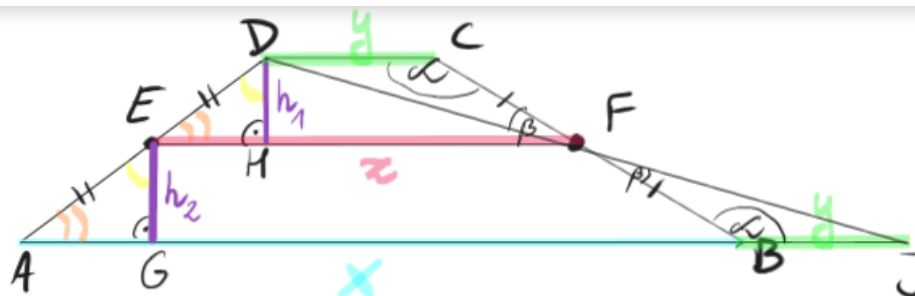
$$\sphericalangle GAE = \sphericalangle HED$$

$$|AE| = |DE|$$

$$\sphericalangle AEG = \sphericalangle EDH$$

Stąd $|EG| = |DH|$, czyli $h_1 = h_2$.
Niech $h_1 = h_2 = h$.

$$\begin{aligned} x + z &= 2(y + z) \\ x + z &= 2y + 2z & / - z \\ x &= 2y + z \\ x &= 2y + \frac{x+y}{2} & / \cdot 2 \\ 2x &= 4y + x + y \\ 2x &= x + 5y & / - x \\ x &= 5y \\ 5y &= x & / : 5 \\ \frac{y}{x} &= \frac{1}{5} \\ \frac{|CD|}{|AB|} &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$



Linia środkowa w trapezie to odcinek łączący środki ramion trapezu.

Linia środkowa w trapezie jest równoległa do podstaw, a jej długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

$$z = \frac{x+y}{2}$$

Trójkąt JFB jest przystający do trójkąta DFC na podstawie cechy przystawania "ką-bok-kąt".

$$\sphericalangle JFB = \sphericalangle DFC = \beta$$

$$|BF| = |CF|$$

$$\sphericalangle FBJ = \sphericalangle FCD = \alpha$$

$$\text{Zatem } |BJ| = |CD| = y.$$

$$\begin{aligned} |AB| &> 0 \\ x &> 0 & / \cdot 5 \\ 5x &> 0 \end{aligned}$$

Trójkąt JDA jest podobny do trójkąta FDE na podstawie cechy podobieństwa "ką-kąt-kąt".

$$\sphericalangle JDA = \sphericalangle FDE, \sphericalangle DAJ = \sphericalangle DEF$$

$$\sphericalangle AJD = \sphericalangle EFD$$

$$\frac{z}{h} = \frac{x+y}{2h} \quad / \cdot h$$

$$z = \frac{x+y}{2}$$

Zatem $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$, co należało wykazać.

Zadanie 8. (0-5) maj 2025 → MR

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi O_1 oraz O_2 o równaniach:

- $O_1: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$
- $O_2: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45$.

Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B . Punkt A ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$.

Oblicz współrzędne punktów A , B oraz M . Zapisz obliczenia.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 5 \quad | -10 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 45 \quad | -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 6y = -5 \\ x^2 - 4x + y^2 - 8y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 14y = -30 \quad | :2 \\ x^2 - 2x + y^2 + 6y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7y = -15 \\ x^2 - 2x + y^2 + 6y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (-7y - 15)^2 - 2(-7y - 15) + y^2 + 6y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ 49y^2 + 210y + 225 + 14y + 30 + y^2 + 6y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ 50y^2 + 230y + 260 = 0 \quad | :10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ 5y^2 + 23y + 26 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \text{ lub } x = 3,2 \\ y = -2 \text{ lub } y = -2,6 \end{cases} \quad \Delta = 23^2 - 4 \cdot 5 \cdot 26 = 529 - 520 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3 \quad y_1 = \frac{-23 - 3}{10} = -\frac{26}{10} = -\frac{13}{5} = -2,6$$

$$y_2 = \frac{-23 + 3}{10} = -2$$

$$A = (3,2; -2,6) \quad B = (-1; -2)$$

$$M = (x_M, y_M)$$

$$x_2 = -7 \cdot (-2) - 15 = -1$$

$$x_1 = -7 \cdot (-2,6) - 15 = \frac{16}{5}$$

$$x_1 = 3,2$$

$$\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$$

$$\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M + \frac{13}{5} \right] = -2 \cdot [x_M + 1, y_M + 2]$$

$$\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M + \frac{13}{5} \right] = [-2x_M - 2, -2y_M - 4]$$

$$A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5} \right) \quad M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5} \right)$$

$$x_M - \frac{16}{5} = -2x_M - 2$$

$$3x_M = -2 + \frac{16}{5}$$

$$3x_M = \frac{6}{5} \quad | \cdot \frac{1}{3}$$

$$x_M = \frac{2}{5}$$

$$x_M = 0,4$$

$$y_M + \frac{13}{5} = -2y_M - 4$$

$$3y_M = -4 - \frac{13}{5}$$

$$3y_M = -\frac{33}{5} \quad | \cdot \frac{1}{3}$$

$$y_M = -\frac{11}{5}$$

$$y_M = -2,2$$

$$M = (0,4; -2,2)$$

Odp. $A = (3,2; -2,6), B = (-1; -2), M = (0,4; -2,2)$.

Zadanie 9. (0-5) maj 2025 → MR

Rozwiąż równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$. Zapisz obliczenia.

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$$

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{3} + 2x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

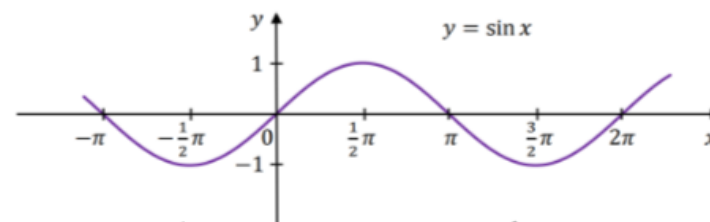
$$\begin{aligned} k = -2 & \quad x = -\frac{7}{6}\pi \notin [-\pi, \pi] \\ k = -1 & \quad x = -\frac{5}{6}\pi \in [-\pi, \pi] \\ k = 0 & \quad x = -\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi] \\ k = 1 & \quad x = \frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi] \\ k = 2 & \quad x = \frac{5}{6}\pi \in [-\pi, \pi] \\ k = 3 & \quad x = \frac{7}{6}\pi \notin [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ -\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \right\}.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



zbiór liczb całkowitych

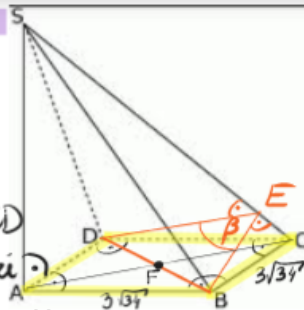
$$x \in [-\pi, \pi]$$

Zadanie 10. (0-5) maj 2025 → MR

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $(-\frac{9}{25})$.

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Niech punkt F będzie punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$ oraz punkt E będzie punktem znajdującym się na krawędzi bocznej CS w takim miejscu, że $\angle BEC = \angle DEC = 90^\circ$. Zatem $\angle BED = \beta$.



$\beta \in (0^\circ, 180^\circ)$ $\frac{\beta}{2} \in (0^\circ, 90^\circ)$

$$\cos \beta = 2 \cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) - 1$$

$$\cos \beta = -\frac{9}{25}$$

$$2 \cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) - 1 = -\frac{9}{25}$$

$$2 \cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{16}{50}$$

$$\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) > 0$$

$$\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$|BD| = |AC| = 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{68} = 3 \cdot 2\sqrt{17} = 6\sqrt{17}$$

$$|BF| = |DF| = \frac{6\sqrt{17}}{2} = 3\sqrt{17}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa $|BS| = |DS|$.

Trojkąty BCS oraz DCS są przystające na podstawie cechy przystawiania „bok-bok-bok” ($|BC| = |DC|$, $|BS| = |DS|$, $|CS| = |CS|$).

Stąd $|BE| = |DE|$, zatem trójkąt BDE jest równoramienny.

$$\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{|EF|}{|DE|}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{|EF|}{|DE|}$$

$$|EF| = \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot |DE|$$

$$|EF| = \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot 15$$

$$|EF| = 6\sqrt{2}$$

$$|DF|^2 + |EF|^2 = |DE|^2$$

$$(3\sqrt{17})^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot |DE| \right)^2 = |DE|^2$$

$$153 + \frac{8}{25} \cdot |DE|^2 = |DE|^2$$

$$\frac{17}{25} \cdot |DE|^2 = 153$$

$$|DE|^2 = 225$$

$$|DE| = 15$$

$$|DE| > 0$$

$$|AB|^2 + |AS|^2 = |BS|^2$$

$$(3\sqrt{34})^2 + (4\sqrt{34})^2 = |BS|^2$$

$$|BS|^2 = 306 + 544$$

$$|BS| = \sqrt{850}$$

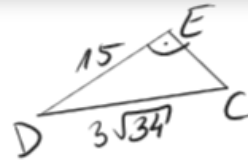
$$|BS| = 5\sqrt{34}$$

$$P_{\triangle ABS} = P_{\triangle ADS} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} = 6 \cdot 34 = 204$$

$$P_{\triangle BCS} = P_{\triangle DCS} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |BS| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 5\sqrt{34} = \frac{3^2}{2} \cdot 15 = 255$$



$$|DE|^2 + |EC|^2 = |DC|^2$$

$$15^2 + |EC|^2 = (3\sqrt{34})^2$$

$$225 + |EC|^2 = 306$$

$$|EC|^2 = 81$$

$$|EC| = 9$$

Trojkąty ACS i ECF są podobne na podstawie cechy podobieństwa „kąt-kąt-kąt”.

$$\angle CAS = \angle FEC = 90^\circ$$

$$\angle ACS = \angle FCE = \alpha$$

$$\angle ASC = \angle CFE = 90^\circ - \alpha$$

$$\frac{|AS|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|EC|} \quad \frac{|AS|}{6\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{2}}{9}$$

$$9 \cdot |AS| = 6\sqrt{17} \cdot 6\sqrt{2}$$

$$9 \cdot |AS| = 36\sqrt{34}$$

$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

$$|AC|^2 + |AS|^2 = |CS|^2$$

$$(6\sqrt{17})^2 + (4\sqrt{34})^2 = |CS|^2$$

$$|CS|^2 = 612 + 544$$

$$|CS| = \sqrt{1156}$$

$$|CS| = 34$$

$$|CS| > 0$$

$$|BC|^2 + |BS|^2 = (3\sqrt{34})^2 + (5\sqrt{34})^2 = 306 + 850 = 1156 = |CS|^2$$

Trojkąt BCS jest prostokątny oraz CS jest przeciwprostokątną tego trójkąta.

$$P_b = 2 \cdot P_{\triangle ABS} + 2 \cdot P_{\triangle BCS} = 2 \cdot 204 + 2 \cdot 255 = 408 + 510 = 918$$

Odp. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi 918.

Zadanie 11. (0-6) maj 2025 → MR

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = (2-m)x^2 - 2(2m+1)x + m+8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

Zapisz obliczenia.

1° $m \neq 2$ → $m \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

2° $\Delta > 0$

3° $x_1 x_2 > 0$

4° $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \leq 180$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 \leq 180$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$$

$$\left(\frac{4m+2}{2-m}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

$$\frac{(4m+2)^2}{(2-m)^2} - \frac{4m+32}{2-m} \leq 180 \quad / \cdot (2-m)^2$$

$$16m^2 + 16m + 4 - (4m+32)(2-m) \leq 180(2-m)^2$$

$$16m^2 + 16m + 4 - (8m - 4m^2 + 64 - 32m) \leq 180(4 - 4m + m^2)$$

$$16m^2 + 16m + 4 - 8m + 4m^2 - 64 + 32m \leq 720 - 720m + 180m^2$$

$$-160m^2 + 760m - 780 \leq 0 \quad / : (-20)$$

$$8m^2 - 38m + 39 \geq 0$$

$$\Delta_4 = (-38)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 39 = 1444 - 1248 = 196 \quad \sqrt{\Delta_4} = 14$$

$$m_1 = \frac{38-14}{2 \cdot 8} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{38+14}{2 \cdot 8} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

$$m \in (-\infty, \frac{3}{2}] \cup [\frac{13}{4}, +\infty)$$

$$a = 2-m$$

$$b = -2(2m+1)$$

$$c = m+8$$

$$m \neq 2$$

$$0 \neq 2-m$$

$$\frac{2-m \neq 0}{a \neq 0}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2(2m+1)}{2-m} = \frac{4m+2}{2-m}$$

$$x_1 x_2 = \frac{m+8}{2-m}$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$[-2(2m+1)]^2 - 4 \cdot (2-m) \cdot (m+8) > 0$$

$$(-2)^2 \cdot (2m+1)^2 - 4(2m+16-m^2-8m) > 0$$

$$4 \cdot (4m^2 + 4m + 1) - 4(-m^2 - 6m + 16) > 0 \quad / : 4$$

$$4m^2 + 4m + 1 - (-m^2 - 6m + 16) > 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 + m^2 + 6m - 16 > 0$$

$$5m^2 + 10m - 15 > 0 \quad / : 5$$

$$m^2 + 2m - 3 > 0$$

$$a_2 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\Delta_2 > 0 \quad \sqrt{\Delta_2} = 4$$

$$m_1 = \frac{-2-4}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$m_2 = \frac{-2+4}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Odd. $m \in (-8, -3) \cup (1, \frac{3}{2}]$.

Zadanie 12. maj 2025 → MR

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

Zadanie 12.1. (0-2)

Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

Niech

x - odległość środka podstawy stożka od tworzącej,
 h - wysokość stożka,
 l - tworząca stożka,
 r - promień podstawy stożka,
 V - objętość stożka.

$$x = 5 \rightarrow x = \frac{hr}{l}$$

$$h > 5$$

$$l > 0$$

$$r > 0$$

$$5 = \frac{hr}{l} \quad | \cdot l$$

$$5l = hr \quad | :5$$

$$l = \frac{hr}{5}$$

$$l^2 = \frac{h^2 r^2}{25}$$

$$h^2 + r^2 = l^2$$

$$h^2 + r^2 = \frac{h^2 r^2}{25}$$

$$\frac{h^2 r^2}{25} - r^2 = h^2 \quad | :25$$

$$h^2 r^2 - 25r^2 = 25h^2$$

$$r^2(h^2 - 25) = 25h^2$$

$$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - 25}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{25h^2}{h^2 - 25} \cdot h$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

Zatem objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$, co należało wykazać. ■

Stożek

$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h - jego wysokością, natomiast l - tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

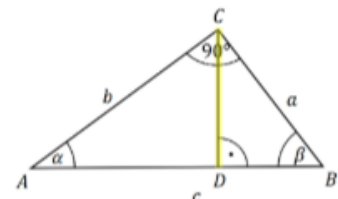
$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|}$$

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

$$R = \frac{1}{2} c$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \tan \alpha = b \cdot \frac{1}{\tan \beta}$$

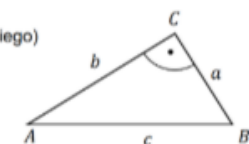


Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.



$$\begin{aligned} h &> 5 \\ h^2 &> 25 \\ h^2 - 25 &> 0 \end{aligned}$$

Zadanie 12.2. (0-4) maj 2025 → MR

Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza.

Oblicz tę najmniejszą objętość. Zapisz obliczenia.

I $V'(h) = \dots$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2(h^2 - 25) - 2h \cdot 25h^3}{(h^2 - 25)^2}$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^4 - 1875h^2 - 50h^4}{(h^2 - 25)^2}$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^4 - 1875h^2}{(h^2 - 25)^2}$$

II $V'(h) = 0$

$$V'(h) = 0 \quad \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^4 - 1875h^2}{(h^2 - 25)^2} = 0 \quad / \cdot \frac{3(h^2 - 25)^2}{\pi} \neq 0$$

$$25h^4 - 1875h^2 = 0 \quad / : 25$$

$$h^4 - 75h^2 = 0$$

$$h^2(h^2 - 75) = 0$$

$$h^2 = 0 \quad \text{lub} \quad h^2 - 75 = 0$$

$$h = 0$$

$$h^2 = 75$$

$$h = -\sqrt{75} \quad \text{lub} \quad h = \sqrt{75}$$

$$h = -5\sqrt{3} \quad \text{lub} \quad h = 5\sqrt{3}$$

$$-5\sqrt{3} \notin (5, +\infty) \quad 5\sqrt{3} \in (5, +\infty)$$

III TABELKA, WNIOSKI, OBLICZENIA + ODPOWIEDŹ!

h	$(5, 5\sqrt{3})$	$5\sqrt{3}$	$(5\sqrt{3}, +\infty)$
$V'(h)$	—	0	+
$V(h)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$V(5\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25 \cdot (5\sqrt{3})^3}{(5\sqrt{3})^2 - 25}$$

$$V(5\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25 \cdot 125 \cdot 3\sqrt{3}}{75 - 25} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3 \cdot 3125\sqrt{3}}{50} = \frac{3125\sqrt{3} \cdot \pi}{50} = \frac{125\sqrt{3} \pi}{2}$$

Odś. Wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza, wynosi $5\sqrt{3}$, natomiast ta najmniejsza objętość wynosi $\frac{125\sqrt{3} \pi}{2}$.

$$\begin{aligned} h &> 5 \\ h^2 &> 25 \\ h^2 - 25 &> 0 \\ (h^2 - 25)^2 &> 0 \end{aligned}$$

$$0 \notin (5, +\infty)$$

$$\begin{aligned} f(h) &= h^2 - 75 \\ y &= h^2 - 25 \\ -5\sqrt{3} & \quad 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$h = 5\sqrt{3}$$